Exercice:

Reprenez le modèle de Ramsey avec croissance de la population et progrès technologique, que nous avons vu en classe cet après-midi.

Posez le sous forme d'un problème d'équilibre. Est-ce que les prix des facteurs sont constants ou augmentent-ils le long du sentier de croissance équilibrée?

Exercice 1

Les ménages sont caractérisés par des préférences $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$. Ils utilisent leur revenus pour consommer (c_t) et investir ($i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$). Les firmes produisent en utilisant une technologie

$$y_t = B.k_t^{1-\alpha}.h_t^{\alpha}.G_t^{\alpha}, \qquad B > 0, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

où G_t sont les dépenses publiques (assimilables à des dépenses d'infrastructures qui rendent les facteurs plus productifs). La fonction de production a des rendements d'échelle constants quand le capital et les dépenses publiques sont considérés jointement, mais des rendement décroissants quand le capital est pris séparément. Les revenus du capital et du travail sont taxés au même taux τ, ce qui finance les dépenses publiques (le gouvernement est contraint d'équilibrer le budget.) Les prix des facteurs sont w_t et r_t, comme d'habitude. Le capital se déprécie au taux δ. Nous sommes intéréssés par l'équilibre compétitif.

1. Quelles sont les contraintes de budget (i) du ménage représentatif, et (ii) du gouvernement ?
2. Posez et résolvez le problème de la firme représentative.
3. Posez le problème du ménage représentatif en terme de programmation dynamique.
4. Trouvez la condition de premier ordre des ménages.
5. À partir de la condition de premier ordre obtenue en (4), exprimez le taux de croissance sur le sentier de croissance équilibrée.
6. Montrez qu'en équilibre la fonction de production est de type "Ak", c'est-à-dire ne souffre pas de rendements décroissants dans le facteur accumulable du capital.
7. Comment peut-on trouver une expression pour ce taux de croissance uniquement en fonction de paramètres exogènes ?
8. (a) Quel taux de taxe maximise le taux de croissance ? (b) Il se trouve que le taux de croissance est une fonction concave de τ (au moins autour du maximum), garantissant un maximum. Vous n'avez pas à prouver cela. Cependant, pouvez vous expliquer intuitivement pourquoi on a une relation concave entre taux de croissance et τ ?
9. Est-ce que l'équilibre est optimal ? Pourquoi ?

EXERCICE:

Consider a model where households can allocate their time between two activities, production in the market and human capital accumulation. Production in the market is given by a technology used by individual firms

$$f(x_t, k_t) = x_t^{1-\alpha} \cdot k_t^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

where k_t (x_t) is the physical (human) capital used by the firm. Since each household has to allocate time between two activities, denote by ϕ_t the proportion of their time endowment devoted to market production and $1 - \phi_t$ the proportion devoted to augmenting their human capital stock. In particular, the technology used to accumulate human capital is given by

$$x_{t+1} - x_t = A(1 - \phi_t)\, x_t, \qquad A > 0.$$

Preferences are given by $u(c_t) = (c_t^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma)$, $\sigma > 0$. Capital depreciates at rate δ. Households discount the future at rate β. The wage rate per unit of human capital is given by $w_{x,t}$ and the rental rate of capital is given by r_t.

1) Solve the household problem. What are the state and control variables? Derive the first order condition(s). Use them to get a first expression for the growth rate of consumption.[1]

2) Solve for the individual firm problem. Combine the first order conditions with market clearing.[2]

3) We are interested in solving for the steady state balance growth path where consumption, physical capital, human capital and output grow at a constant rate and where the proportion of time allocated to human capital accumulation is constant. We want to show that $g_c = g_k = g_x = g_y = g$. For that purpose, use the first order conditions already obtained and the aggregate resource constraint for the good produced in the market, as well as the aggregate law of motion for human capital.

4) What are the growth rates of the two rental rates r_t and $w_{x,t}$?

5) Conclude by expressing the growth rates as a function of exogenous parameters only. Is that an exogenous or an endogenous growth model? Do we have any restriction on parameter values to ensure positive growth?

[1] Take the convention that $\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1 + g_c$.

[2] Denote individual (aggregate) variables using lowercase (uppercase) symbols.